MINISTERE DE L'INDUSTRIE, DES P. ET T.
ET DU TOURISME

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
ET DES MINES D'ALES

MATHEMATIQUES

CONCOURS D'ADMISSION 1987

(Temps accordé : 4 heures)

Les candidats doivent traiter les problèmes I et II qui sont indépendants.

NB : *Les copies illisibles ou mal présentées sont corrigées aux risques et périls du candidat.*

Les règles à calcul, tables de logarithmes et tables trigonométriques sans formulaire, ainsi que les calculatrices électroniques portatives autonomes non imprimantes sont autorisées.

Toute autre documentation est interdite.

PROBLEME I

Ce problème comprend 2 parties.

PARTIE I

1) On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement supérieur à (-1) par :

$$f(x) = \frac{\ln (1+x)}{1+x}$$

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

1 a Etudier les variations de f.

Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse nulle.

Calculer les coordonnées du point d'inflexion de (C).

Tracer (C) et (T).

1 b λ étant un réel strictement positif, calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de l'ensemble des points du plan de coordonnées x et y vérifiant :

$$0 \leq x \leq \lambda \; ; \; 0 \leq y \leq f(x)$$

Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ pour λ tendant vers l'infini.

2) Résoudre, sur $]-1 ; +\infty[$, l'équation différentielle :

$$(1+x)^2 y' + (1+x) y - 1 = 0$$

Déterminer la solution nulle pour x = 0.

3) Déterminer le développement limité de f, à l'ordre n, au voisinage de 0 ; on exprimera ce développement sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k + x^n . \varepsilon(x)$$ où α_k désigne un réel que l'on calculera pour tout entier naturel k non nul, $k \leq n$ et ε une fonction de limite nulle en 0.

PARTIE 2

Dans cette partie, on note, pour tout entier naturel k non nul :

$$a_k = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$$

et on se propose d'étudier pour tout réel x la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k x^k$$

1) 1 a Démontrer que pour tout entier naturel p non nul :

$$\ln(p+1) - \ln p \leq \frac{1}{p} \leq 1$$

1 b Démontrer que pour tout entier naturel k non nul :

$$\ln(k+1) \leq a_k \leq k$$

En déduire la limite de a_k quand k tend vers l'infini.

2) On considère pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x, la fonction P_n qui à x associe :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n-1} a_n x^{n+1}$$

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \; P_n(x) = (1+x) S_n(x)$$

3) On considère pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x strictement supérieur à (-1) la fonction I_n qui à x associe :

$$I_n(x) = (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, dt$$

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1 ; +\infty[, \quad I_n(x) = P_n(x) + (-1)^n a_n x^{n+1} - \ln(x+1)$$

T.s.v.p.

4) Dans toute cette question on suppose : $|x| < 1$

4 a Démontrer en utilisant la question 1 :

$$\forall x \in]-1 ; 1[, \quad \lim_{n \to +\infty} (a_n x^{n+1}) = 0$$

4 b Démontrer :

$$\forall x \in]-1 ; 1[, \quad \lim_{n \to +\infty} I_n(x) = 0$$

On pourra distinguer les cas : $x = 0$; $x \in]0 ; 1[$; $x \in]-1 ; 0[$

4 c Déduire de l'ensemble des résultats précédents que pour tout réel x, tel que $|x| < 1$, la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente ; préciser sa limite.

5) 5 a Démonter que, si pour un réel x, la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n x^n) = 0$$

5 b En déduire que pour tout réel x, tel que $|x| \geqslant 1$, la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.

PROBLEME 2 Ce problème comprend 2 parties.

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{R}$.

On note δ l'application de E dans E qui, à tout polynôme P, fait correspondre le polynôme $\delta(P)$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad [\delta(P)](x) = P(x) - P(x-1).$$

PARTIE I

E_4 est le sous-espace vectoriel des polynômes de E de degré inférieur ou égal à 3. On note δ_4 la restriction de δ à E_4.

1) Montrer que δ_4 définit un endomorphisme de E_4.

2) 2 a Construire la matrice Δ_4 de δ_4 relative à la base canonique $\mathcal{B}_4$ de E_4. On posera $\mathcal{B}_4 = (B_0 ; B_1 ; B_2 ; B_3)$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}$ $B_k(x) = x^k$, $(k = 1 ; 2 ; 3)$ et $B_0(x) = 1$.

2 b Déterminer le rang, le noyau et l'image de δ_4.

3) 3 a Construire successivement les polynômes A_1, A_2, A_3 de E_4 tels que :

$A_0 = B_0$ et $\delta_4(A_k) = k A_{k-1}$ avec $A_k(0) = 0$ $(k = 1 ; 2 ; 3)$.

3 b Démonter que la famille (A_0, A_1, A_2, A_3) définit une base $\mathcal{A}_4$ de E_4.

3 c Construire la matrice Δ'_4 de δ_4 relative à la base $\mathcal{A}_4$ ainsi que la matrice de passage H_4 de la base $\mathcal{B}_4$ à la base $\mathcal{A}_4$. Quelle relation matricielle peut-on écrire ?

T.s.v.p.

ECOLES NATIONALES SUPERIEURES
des TECHNIQUES INDUSTRIELLES et des MINES: ALES
page 227
1987

4) 4 a Soit φ l'endomorphisme de E_4 tel que :

$$\varphi(B_k) = A_k \quad (k = 0 ; 1 ; 2 ; 3)$$

Démontrer que φ est bijectif.

4 b : Reconnaître l'application ψ de E_4 dans lui-même telle que :

$$\psi = \varphi^{-1} \circ \delta_4 \circ \varphi$$

PARTIE 2

Soit n entier naturel supérieur ou égal à 2. E_{n+1} désigne le sous-espace vectoriel des polynômes de E de degré inférieur ou égal à n.

1) $(A_0 ; A_1 ; \ldots A_n)$ est la famille des polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} A_0(x) = 1 \\ A_k(x) = x(x+1) \ldots (x+k-1) \qquad (k = 1 ; 2 ; \ldots n) \end{cases}$$

1 a Montrer que la famille $(A_0 ; A_1 ; \ldots A_n)$ est une base de E_{n+1}.

1 b Montrer que la restriction δ_{n+1} de δ à E_{n+1} est un endomorphisme de E_{n+1}.

1 c Calculer $\delta_{n+1}(A_k)$ pour $k = 0 ; 1 ; 2 ; \ldots n$.

En déduire la matrice Δ'_{n+1} de δ_{n+1} relative à la base $(A_0 ; A_1 ; \ldots A_n)$.

2) 2 a Déterminer le rang, le noyau et l'image de δ_{n+1}.

2 b Soit p un entier naturel strictement inférieur à n.

Déduire du a) qu'il existe dans E_{n+1} un polynôme P_p et un seul vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} P_p(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : [\delta_{n+1}(P_p)](x) = x^p \end{cases}$$

2 c Démontrer que pour $1 \leq p \leq n-1$, $P_p(x)$ est divisible par $x+1$.

2 d Etablir pour $1 \leq p \leq n-1$, la relation $\sum_{k=1}^{n} k^p = P_p(n)$.

3) Démontrer pour $1 \leq p \leq n-1$ que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad P'_p(x) = p\, P_{p-1}(x) + P'_p(0)$$

où P'_p désigne le polynôme dérivé de P_p.

4) On désigne par R_p le polynôme dont le polynôme dérivé est P_p, tel que $R_p(0) = 0$.

Démontrer la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; 1 \leq p \leq n-1 : P_p(x) = p\, R_{p-1}(x) + x[1 - p\, R_{p-1}(1)]$$

5) Calculer $P_1(x)$; $P_2(x)$; $P_3(x)$ et $P_4(x)$.

En déduire $\sum_{k=1}^{n} k^p$ pour $p = 1 ; 2 ; 3 ; 4$.